التطبيقات المتصلة في الزمر التبولوجية

سوف ندرس في هذا الفصل التطبيقات المتصلة المتعلقة بالزمر التبولوجية مع موضوعات الفصل في الزمر التبولوجية ، الزمر الجزئية ، زمر القسمة زمر الجداء الديكارتي ، الزمر المتابعة

مبرهنة:
لتكن G زمرة و τ تبولوجيا على G فإن G تكون زمرة تبولوجية إذا وفقط إذا كان التطبيق $g_3 : G\times G \to G$ حيث $g_3(x,y)=xy^{-1}$ مستمراً في كل من المتحولين

البرهان:
نفرض أن G زمرة تبولوجية فإن كلاً من التطبيقين $g_1 : G\times G \to G$ حيث $g_1(x,y)=xy$ و $g_2 : G \to G$ حيث $g_2(x)=x^{-1}$ مستمر على عناصره ولنبرهن أن g_3 المعرف سابقاً مستمر
لتكن W جوار ما للعنصر xy^{-1} بما أن g_1 مستمر فرضاً فإنه توجد جوار U للعنصر x وجوار V للعنصر y^{-1} بحيث يكون $UV\subseteq W$ وبما أن g_2 مستمر فإنه توجد جوار للعنصر y بحيث يكون $V_1^{-1}\subseteq V$ ومنه نستنتج

$$UV_1^{-1}\subseteq UV\subseteq W$$

ومنه نستنتج أن g_3 مستمر في x, y

العكس:
نفرض أن g_3 تطبيق مستمر في x, y ولنبرهن أن g_1 مستمر في x, y و g_2 مستمر في x بأنه مستمر في النقطة (e,y) حيث $g_3(e,y)=ey^{-1}=y^{-1}$ أي أنه من أجل أي جوار W للعنصر y^{-1} توجد جوار U للعنصر y بحيث يكون $U^{-1}=eU^{-1}\subseteq W$ وهذا يبين أن التطبيق g_2 مستمر في أي نقطة من المنطلق
بما أن $g_3 : G\times G \to G$; $(x,y)\to xy^{-1}$ مستمر في النقطة (x,y^{-1}) فإن
$(x,y^{-1}) \to xy$
لكل W للعنصر xy توجد جوارات U للعنصر x و V جوار للعنصر

y' بحيث يكون $u' v'^{-1} \subset W$ أي أنه أوجدنا من أجل الجوار W الإختيارية للنقطة $(x.y)$ مجاورة u' للنقطة x ومجاورة v' للنقطة y بحيث يكون

$$u' v'^{-1} \subset W$$

معناه g مستمر وبالتالي G ~~تكون~~ تكون زمرة طبولوجية

مبرهنة:
لتكن G زمرة طبولوجية عندئذ التطبيقات الداخلية اليمنية واليسارية ρ_a ، λ_a والتطبيق $g_2 : x \to x^{-1}$ والتطبيق $h : G \to G$ ، $x \to axa'$ تكون جميعها هوميومورفيزمات

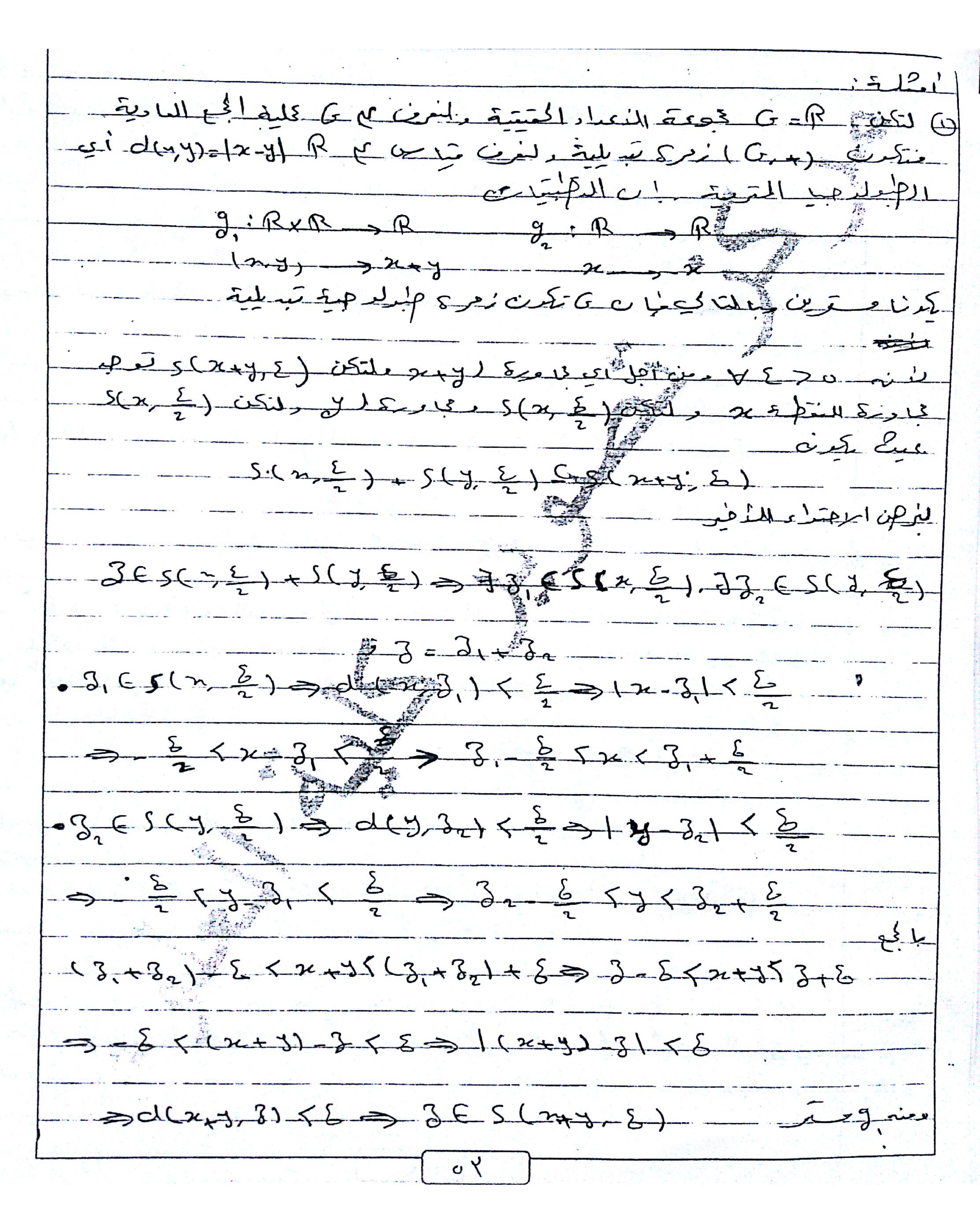
البرهان:
لقد رأينا سابقاً في الزمرة الطبولوجية أن كل من ρ_a و λ_a هوميومورفيزم أما g_2 فمستمر ومتقابل وكذلك تطبيقه العكسي g_2^{-1} هو نفسه g_2 لذلك مستمر بالتالي g_2 هوميومورفيزم
إن التطبيق $h : x \to axa'$ هو عبارة عن تركيب هوميومورفيزمات $\lambda_a : x \to ax$ ، $\rho_{a'} : x \to xa'$ فلذلك يكون h هوميومورفيزم

مبرهنة:
لتكن F مجموعة مغلقة ، P مجموعة مفتوحة في زمرة طبولوجية G وليكن $a \in G$ عندئذ تكون aF ، Fa ، F^{-1} مجموعات مغلقة وتكون aP ، Pa ، P^{-1} مجموعات مفتوحة

البرهان:
واضح من كون ρ_a ، λ_a ، g_2 هوميومورفيزمات فهي تحافظ على الصفات الطبولوجية

$\rho_a(P) = Pa$ مفتوحة ، $\lambda_a(F) = aF$ مغلقة ، $\rho_a(F) = Fa$ مغلقة ، $g_2(F) = F^{-1}$ مغلقة

$\lambda_a(P) = aP$ مفتوحة ، $g_2(P) = P^{-1}$ مفتوحة



أمثلة:

① لتكن $G = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف على G عملية الجمع العادية فتكون $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنعرف متري على R أي $d(x,y)=|x-y|$ الطبولوجيا المترية . بالاثباتات

$g_1 : R\times R \to R$ $\qquad$ $g_2 : R \to R$

$(x,y) \to x+y$ $\qquad$ $x \to -x$

يكفينا مستمرين التابعين لكي G تكون زمرة طبولوجية تبديلية

لنبرهن $\forall \varepsilon > 0$ من أجل أي جوار لـ $x+y$ ولتكن $S(x+y,\varepsilon)$ توجد جوارات للنقطة x ولتكن $S(x,\frac{\varepsilon}{2})$ وجوار لـ y ولتكن $S(y,\frac{\varepsilon}{2})$ بحيث يكون

$$S(x,\tfrac{\varepsilon}{2}) + S(y,\tfrac{\varepsilon}{2}) \subseteq S(x+y,\varepsilon)$$

لنبرهن الاحتواء الأخير

$$z \in S(x,\tfrac{\varepsilon}{2}) + S(y,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \exists z_1 \in S(x,\tfrac{\varepsilon}{2}), \exists z_2 \in S(y,\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$z = z_1 + z_2$$

• $z_1 \in S(x,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(x,z_1) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x - z_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x - z_1 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow z_1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < z_1 + \frac{\varepsilon}{2}$

• $z_2 \in S(y,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(y,z_2) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |y - z_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < y - z_2 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow z_2 - \frac{\varepsilon}{2} < y < z_2 + \frac{\varepsilon}{2}$

بالجمع

$(z_1+z_2) - \varepsilon < x+y < (z_1+z_2) + \varepsilon \Rightarrow z - \varepsilon < x+y < z+\varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < (x+y) - z < \varepsilon \Rightarrow |(x+y) - z| < \varepsilon$

$\Rightarrow d(x+y, z) < \varepsilon \Rightarrow z \in S(x+y,\varepsilon)$ ومنه g_1 مستمر

لتكن $S(-x,\delta)$ مجاورة ما للنقطة $-x$ فإنه توجد كرة $S(x,\delta)$ للنقطة x بحيث يكون $-S(x,\delta) \subseteq S(-x,\delta)$

$\forall y \in -S(x,\delta) \Rightarrow \exists x_1 \in S(x,\delta) ; y = -x_1$

$x_1 \in S(x,\delta) \Rightarrow d(x,x_1) < \delta \Rightarrow |x - x_1| < \delta$

$\Rightarrow -\delta < x - x_1 < \delta \Rightarrow x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$ نضرب بالمتباينة بـ (-1)

$\Rightarrow -x_1 - \delta < -x < -x_1 + \delta \Rightarrow y - \delta < -x < y + \delta$

$\Rightarrow -\delta < -x - y < \delta \Rightarrow |(-x) - y| < \delta \Rightarrow d(-x, y) < \delta$

$\Rightarrow y \in S(-x,\delta)$

أي أن $-S(x,\delta) \subseteq S(-x,\delta)$ ومنه g مستمر

② $G = R^*$ مع الضرب العادي مع التبولوجيا المترية تشكل زمرة تبولوجية تبديلية

③ لتكن G زمرة جمعية مع التبولوجيا المترية عندئذٍ فإنه لكل جوار W للصفر فإن $\{x\}$، $\{y\}$ جواران لـ x, y على الترتيب بحيث أن $xy^{-1} \in W$ (زمرة جمعية تعني $x - y$)

$\{x\}\{y\}^{-1} = \{xy^{-1}\} \subseteq W$

جملة مجاورات العنصر الحيادي:

تعريف:

ندعو المجموعة الجزئية U من G متناظرة إذا كان $U = U^{-1}$ وإذا كانت G زمرة جمعية $U = -U$

ملاحظة:

كل زمرة تبولوجية تملك جملة أساسية متناظرة $\{U\}$ لمجاورات العنصر الحيادي e

البرهان:

لتكن $\{V\}$ جملة أساسية [illegible] من الجوارات المفتوحة للعنصر الحيادي e. بما أن $e^{-1} = e$ و $f: G \to G$ هوميومورفيزم يكون من أجل أي V من الأسرة $\{V\}$ فإن V^{-1} جوارة مفتوحة لـ e فإذا أخذنا $V^{-1} \cap V$ فإن U تكون جوارة مفتوحة للعنصر e وهي متناظرية وذلك لأن $U^{-1} = V^{-1} \cap V = U$ ... إذا أخذنا أن كل V تحوي U فإن كل جوارة لـ e تحوي V وكل V تحوي U ومنه نستنتج أن $\{U\}$ تشكل جملة أساسية لجوارات العنصر e وهي متناظرية

(ومنه نجد أن جملة غير متناهية من الزمرة الخطية تبولوجية لأن f هوميومورفيزم)

برهنة:

لتكن $\{U\}$ أسرة جميع جوارات العنصر e في زمرة تبولوجية G عندئذ من أجل أي مجموعة جزئية A من G يكون $\bar{A} = \bigcap AU = \bigcap UA$

البرهان:

ليكن $x \in \bar{A}$ عندئذ من أجل أي $U \in \{U\}$ فإن xU^{-1} جوارة للنقطة x ومنه

$xU^{-1} \cap A \neq \phi \Rightarrow x \in AU$

ولذلك نختار $a \in A$ حيث $a \in xU^{-1} \cap A$

$a \in xU^{-1} \Rightarrow x^{-1}a \in U^{-1} \Rightarrow (x^{-1}a)^{-1} \in U$

$\Rightarrow a^{-1}x \in U \Rightarrow a(a^{-1}x) \in AU \Rightarrow x \in AU$

ومنه $x \in \bigcap AU$ أي أن $\bar{A} \subseteq \bigcap AU$

وبالعكس: إذا كانت $x \in \bigcap AU \Rightarrow x \in AU$ وذلك من أجل أي $U \in \{U\}$ وعندئذ من أجل أي جوارة مفتوحة P للعنصر e فإن xP^{-1} تكون جوارة للعنصر e ومنه $x \in AP^{-1}x$ (لأن $xP^{-1} \in \{U\}$)

$\Rightarrow$ يوجد $a \in A$ و $p \in P$ بحيث يكون $x = ap^{-1}x \Rightarrow e = ap^{-1}$ (نضرب من اليمين بـ p) $\Rightarrow$ [illegible] $p = a$ ومنه نستنتج أن $P \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$ وبالتالي فإن

$\bigcap AU \subseteq \bar{A}$

ومن البرهان أعلاه نستنتج أن $\bar{A} = \cap A u$ وبنفس الطريقة نبرهن أن
$\bar{A} = \cap u A$

مبرهنة:
من أجل أي جوار W للعنصر e في زمرة تبولوجية G توجد جوار U للعنصر e بحيث يكون $\bar{U} \subseteq W$ وبالتالي فإن كل زمرة تبولوجية تكون T_3 ـ فضاء

البرهان:
بما أنه من أجل أي جوار W للعنصر e توجد جوارين U, V للعنصر e بحيث يكون $UV \subseteq W$ لاستمرارية الضرب في النقطة (e,e) | $g: G \times G \to G$, $g(e,e) = e.e = e$ $\Rightarrow UV \subseteq W$.
وحسب المبرهنة السابقة يكون $\bar{U} \subseteq UV$ ومن ثم $\bar{A} \subseteq Au$
وبما أن $UV \subseteq W$ فإن $\bar{U} \subseteq W$
والآن نبرهن أنه من أجل أي مجموعة مغلقة F ومن أجل أي نقطة $x \notin F$ توجد جوارات لـ F ولـ x بحيث يكون تقاطعهما خالياً (تعريف)

لتكن F مجموعة مغلقة و $x \notin F \Rightarrow G-F$ جوار للنقطة $x \Rightarrow x^{-1}(G-F)$ جوار للعنصر e ⇐ حسب هذه المبرهنة توجد جوار V للعنصر e بحيث يكون $\bar{V} \subseteq x^{-1}(G-F)$ ⇐ بضرب الطرفين بـ x من اليسار
$x\bar{V} \subseteq (G-F) \Rightarrow F \subseteq G - x\bar{V}$
نجد أننا وجدنا جوار لـ F وهي $G - x\bar{V}$ و xV جوار لـ x

$xV \cap (G - x\bar{V}) = \phi$
لأن $xV \subseteq x\bar{V} \Rightarrow G - x\bar{V} \subseteq G - xV \Rightarrow xV \cap (G - x\bar{V}) = \phi$
ومنه ينتج أن G هي T_3 ـ فضاء

مبرهنة:
في أي زمرة تبولوجية G توجد جملة أساسية $\{U\}$ من جوارات العنصر الحيادي e بحيث أن
a) كل U تكون متناظرة ومغلقة

b) من أجل كل u من $\{u\}$ يوجد عنصر v من $\{u\}$ بحيث يكون $v^2 \subseteq u$

c) من أجل أي u من $\{u\}$ و $a \in G$ يوجد عنصر v من $\{u\}$ بحيث يكون

$$v \subseteq a^{-1} u a \qquad a v a^{-1} \subseteq u$$

البرهان:

a) بما أن G زمرة طوبولوجية فحسب البرهان السابق توجد جملة $\{\bar{v}\}$ بحيث تكون جملة أساسية للجوارات للعنصر e فإذا أخذنا $\bar{v}^{-1}$ تكون $u = \bar{v} \cap \bar{v}^{-1}$ تكون $\{u\}$ جملة أساسية تحقق الخاصية a) ومطلقة

b) $\forall u \in \{u\}$ توجد جوارين u_1, u_2 للعنصر e بحيث يكون $u_1 u_2 \subseteq u$ فإذا أخذنا $v = u_1 \cap u_2$ يكون

$$v^2 = v \cdot v = (u_1 \cap u_2) \cap (u_1 \cap u_2) \subseteq u_1 u_2$$

c) تنتج مباشرة من كون التطبيق $x \to a x a^{-1}$ هو تشاكل

$e \to a e a^{-1} = a a^{-1} = e$

من أجل أي جوار u للعنصر e فإنه توجد جوار v للعنصر e بحيث يكون $a v a^{-1} \subseteq u$

$\Rightarrow v \subseteq a^{-1} u a$

انتهت الحلقة